Théorème de Lax-Milgram et application

Théorème 1 (Lax-Milgram)**.** *Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H, et $\ell \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $a(u,v) = \ell(v)$.*

Démonstration.

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, on a $\ell(v) = \langle w, v\rangle$. De plus, comme a est linéaire par rapport à sa deuxième variable, on a également l'existence, pour tout $u \in H$, d'un élément $A_u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, on a $a(u,v) = \langle A_u, v\rangle$.

Montrons qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $A_u = w$. Pour cela, considérons l'application suivante :

$$A : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & A_u \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire est continue. En effet, on a d'une part, pour tous $u, u' \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\forall\, v \in H,\ \langle A_{u+\lambda u'} - A_u - \lambda A_{u'}, v\rangle = \langle A_{u+\lambda u'}, v\rangle - \langle A_u, v\rangle - \lambda \langle A_{u'}, v\rangle = a(u+\lambda u', v) - a(u,v) - \lambda a(u', v) = 0$$

Ainsi A est linéaire. D'autre part, par continuité de a, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $u, v \in H$, on a $|a(u,v)| \leqslant M \|u\| \|v\|$. On a alors :

$$\|Au\|^2 = \langle A_u, A_u\rangle = A(u, A_u) \leqslant M \|u\| \|Au\|$$

Donc $\|Au\| \leqslant M \|u\|$, et A est continue.

Par coercivité de a, il existe $\nu > 0$ tel que, pour tout $u \in H$, on a $a(u,u) \geqslant \nu \|u\|$. En posant $\eta = \frac{\nu}{M^2} > 0$, on considère l'application :

$$T : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & u - \eta(Au - w) \end{array} \right.$$

On a ainsi $A_u = w$ si, et seulement si, u est un point fixe de T. Or, pour tous $u, v \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|^2 &= \|u - v - \eta(Au - Av)\|^2 \\
&= \|u-v\|^2 - 2\eta \langle u - v, A(u-v)\rangle + \eta^2 \|A(u-v)\|^2 \\
&= \|u-v\|^2 - 2\eta a(u-v, u-v) + \eta^2 \|A(u-v)\|^2 \\
&\leqslant \|u-v\|^2 \left(1 - 2\eta\nu + \eta^2 M^2\right) \\
&\leqslant \|u-v\|^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{M^2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $1 - \frac{\nu^2}{M^2} < 1$, on a que T est contractante. De plus, comme H est un espace de Hilbert, c'est en particulier un espace complet. Par le théorème de point fixe de Picard, T admet un unique point fixe $u \in H$. Ainsi, il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tous $u, v \in H$, on a $a(u,v) = \langle A_u, v\rangle = \langle w, v\rangle = \ell(v)$.

$\square$

Application 2. *Pour $f \in L^2(\Omega)$, l'équation de Poisson $-\Delta u = f$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admet une unique solution faible.*

Démonstration.

La formulation variationnelle de ce problème est, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v = \int_\Omega fv \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{L^2}$$

En posant $a(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_{L^2}$, on a facilement que a est une forme bilinéaire continue, et que ℓ est une forme linéaire continue grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au fait que $\|.\|_{L^2} \leqslant \|.\|_{H^1}$. De plus, grâce à l'inégalité de Poincaré, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in H$, on a :

$$a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{C^2}{2}\|u\|_{L^2}^2 = \frac{\min(1, C^2)}{2}\|u\|_{H^1}^2$$

Ainsi, a est coercive. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution faible à l'équation de Poisson. □

Références

[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson